多项式在有理数域上不可约判别方法

王建莉　内蒙古科技大学包头师范学院数学科学学院

摘要：多项式理论在高等代数中占据着重要的地位，而在多项式理论中不可约多项式是其重要的组成部分。本文给出了有理数域上多项式不可约的判别方法，以及不可约多项式的应用。

关键词：多项式；不可约；判别方法；应用

定理 1：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in Z[x](a_n\neq 0, n\geq 2)$，$p$ 是素数

（1）p 不整除 a_1；

（2）p 整除 $a_2, a_3, \cdots a_n$；

（3）p 不整除 a_n；

（4）p 不整除 a_1-b，其中 $b/\frac{a_0a_n}{p}$，那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 2：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in Z[x](a_n\neq 0, n\geq 2)$，$p$ 是素数

（1）p 不整除 a_{n-1}；

（2）p 整除 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}$；

（3）p^2 不整除 a_0；

（4）p 不整除 $a_{n-1}-b$，其中 $b/\frac{a_0a_n}{p}$，那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 3：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in Z[x](a_n\neq 0, n\geq 2)$，$p$ 是素数

（1）p 不整除 $a_j(0<j<n)$；

（2）p 整除 $a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$；

（3）p^2 不整除 a_0, a_n；

（4）p 不整除 a_1-b，其中 $b/\frac{a_0a_n}{p^2}$，那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 4：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in Z[x](a_n\neq 0, n\geq 3)$，$p$ 是素数

（1）p 不整除 $a_i, a_{i+1}(1\leq i\leq n-2)$；

（2）p 整除 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \cdots, a_n$；

（3）p^2 不整除 a_0, a_n；

（4）p 不整除 $a_i-b, a_{i+1}-b$，其中 $b/\frac{a_0a_n}{p^2}$，$f(x)$ 无理想根

那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例、判断以下多项式在有理数域上是否可约

（1）$f_1(x)=5+4x+3x^n(n\geq 2)$　　式（1-1）

（2）$f_2(x)=5x^n+7x^{n-1}-22(n\geq 2)$　　式（1-2）

（3）$f_3(x)=7x^n+2000x^5+7(n\geq 6)$　　式（1-3）

（4）$f_4(x)=5+97x^{99}+2008x^{100}+5x^n$ $(n>100)$　　式（1-4）

解：（1）由式（1-1）可知 $a_0=5, a_1=4, a_n=3, a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=0$

若取 p=3，那么 3 不整除 a_1；3 整除 a_2, a_3, …, a_n；3^2 整除 a_n；

3 不整除 a_1-b，其中 $b=\frac{a_0a_n}{p}=\frac{5\times 3}{3}=5$，所以多项式 $f_1(x)$ 在有理数域上不可约 .

（2）由式（1-2）可知 $a_n=5$，$a_{n-1}=7$，$a_0=-22$，$a_1=a_2=\cdots=a_{n-2}=0$

若取 p=11，那么 11 不整除 a_{n-1}；11 整除 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}$；$11^2$ 不整除 a_0；11 不整除 a_1-b，其中 $b=\frac{a_0a_n}{p}=\frac{-22\times 5}{11}=-10$，

所以 $f_2(x)$ 在有理数域上不可约。

（3）由式（1-3）可知 $a_0=a_n=7$，$a_5=2000$，$a_1=a_2=a_3=a_4=a_6=\cdots=a_{n-1}=0$

若取 p=7，那么 7 不整除 $a_5=2000$；7 整除 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, \cdots, a_n$；$7^2$ 不整除 a_0, a_n，7 不整除 a_1-b，其中 $b=\frac{a_oa_n}{p^2}=\frac{7\times 7}{7^2}=1$

所以 $f_3(x)$ 在有理数域不可约。

（4）由式（1-4）

可知 $a_0=a_n=5, a_{99}=97, a_{100}=2008, a_0=a_1=\cdots=a_{97}=a_{101}=\cdots=a_{n-1}=0$

若取 p=5

那么 5 不整除 a_0, a_{100}；5 整除 a_0, a_1,…, a_{97}, a_{101},…,a_n；5^2 不整除 a_0, a_n；5 不整除 a_{99}-b, a_{100}-b, 其中 $b=\frac{a_0a_n}{p^2}=\frac{5\times 5}{5^2}=1$

由于 $f_4(x)$ 的系数全部都是整数，所以 $f_4(x)$ 的有理根只能是负数，设 $\frac{v}{u}, (u,v)=1$, $(u>0, v<0)$ 是 $f_4(x)$ 的有理根，

则 $u\mid 5, v\mid 5, u=-1, v=-5, \frac{v}{u}=-1,-5,-\frac{1}{5}$，$\forall c\in\left\{-1,-5,-\frac{1}{5}\right\}$，所以 $\frac{f_4(x)}{1-c}$ 不是正数，故 $f_4(x)$ 无有理根，所以 $f_4(x)$ 在有理数域上不可约。

参考文献

[1] 王萼芳，石生明 . 高等代数 [M]. 北京：高等教育出版社，2013：29–46.

[2] 何彩 . 多项式不可约的判别方法 [D]. 榆林：榆林学院，2013：12–13.

[3] 杨振麟 . 关于多项式不可约性的定理 [J]. 工科数学，1997（3）：103.

[4] 刘中良 . 有理数域上多项式不可约的判定 [J]. 科技信息，2009（1）：163.

[5] 黄瑞芳 . 整系数多项式在有理数域上不可约的几个判定定理 [J]. 科技创新导报，2019（7）：220.